Ecole Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ENTRÉE 1979

Mathématiques 1re épreuve

LUNDI 14 MAI DE 14 H A 18 H

Durée : 4 heures

Dans ce problème, on note :

* J l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

* M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, d'élément générique a_{ij}, i étant l'indice de ligne, j l'indice de colonne.

* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres réelles ou complexes, distinctes ou confondues de M et $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$, $|\lambda_3|$ leurs modules.

* I la matrice unité de dimension 3 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Tr(M) le nombre : $\sum_{i \in J} a_{ii}$ appelé trace de la matrice M.

PARTIE I

1/ - Démontrer que $Tr(M) = \sum_{i \in J} \lambda_i$.

2/ - Démontrer que l'une, au moins, des valeurs propres de M est réelle.

3/ - Soit M^2 le carré de la matrice M. Démontrer que pour tout $i \in J$, λ_i^2 est valeur propre de M^2.

Réciproquement, si μ est une valeur propre de la matrice M^2, démontrer que l'une au moins des racines carrées (dans $\mathbb{C}$) de μ est valeur propre de M (on pourra poser $\mu = \omega^2$).

Quelle conclusion dégage-t-on de cette étude ?

PARTIE II

Dans cette partie on suppose que M satisfait à la condition (1) suivante :

(1) $\exists k \in R^{+*}$ tel que $Tr(M) = k$ et $Tr(M^2) = k^2$

1/ - Démontrer que M admet au moins une valeur propre λ_1 réelle non nulle.

2/ - On suppose $\lambda_1 \geq k$.

a) Démontrer que les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 sont non-réelles ou nulles.

b) Montrer que $|\lambda_2| < \lambda_1$ et $|\lambda_3| < \lambda_1$.

PARTIE III

Dans cette partie on suppose que M satisfait à la condition (2) suivante :

(2) $\forall (i, j) \in J^2$, $a_{ij} \in R^{+*}$ et $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$

1/ - Pour cette question on suppose, de plus, M singulière (c'est-à-dire non-inversible).

a) Déterminer les valeurs propres de M.

b) Démontrer que les vecteurs colonnes de M sont vecteurs propres de M. A quelle(s) valeur(s) propre(s) sont associés ces vecteurs propres ?

.../...

c) Démontrer que M satisfait à la condition (3) suivante :

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^* : M^n = 3^{n-1} M$

d) Soit $\Delta(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_o$ le déterminant de la matrice $M - \lambda I$, où λ est un complexe. Déduire de (3) que, si on note $\Delta(M)$ la matrice : $a_3 M^3 + a_2 M^2 + a_1 M + a_o I$, alors $\Delta(M)$ est la matrice nulle.

e) Peut-on trouver un polynôme φ à coefficients réels de degré strictement inférieur à trois tel que $\varphi(M)$ soit la matrice nulle ?

2/ - Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit singulière est : $\forall (i, j, k) \in J^3, \quad a_{ik} \cdot a_{kj} = a_{ij}$.

3/ - a) Démontrer que si M est régulière (c'est-à-dire inversible) elle admet alors une seule valeur propre réelle λ_1 et que $\lambda_1 > 3$.

b) En déduire que $|\lambda_2| < \lambda_1$ et $|\lambda_3| < \lambda_1$.

4/ - Démontrer que M est singulière si et seulement si elle admet la valeur propre 3.

PARTIE IV

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base canonique B_o, soit f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B_o est :

$$M_o = \begin{pmatrix} 1 & 1/x & 1/xz \\ x & 1 & 1/z \\ xz & z & 1 \end{pmatrix}, \quad x>0 \text{ et } z>0.$$

1/ - Déterminer dans la base B_1 définie par les vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ xz \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -z \end{pmatrix}$$

la matrice T_o de l'endomorphisme f_1.

2/ - Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice T_α dans la base B_1 est définie par :

$$T_\alpha = T_o + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que quel que soit α réel, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -3$, T_α est singulière et possède trois valeurs propres distinctes que l'on déterminera.

3/ - a) Déterminer la matrice M_α de l'endomorphisme f_α dans la base B_o.

b) Déterminer une base B_2 de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont, pour tout α réel $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -3$, vecteurs propres de f_α.

c) La matrice M_o est-elle diagonalisable ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail